1) Démonstration de cours :

Soit n et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k < n$, $\binom{n}{k} = \frac{k!}{n!(n-k)!}$.

$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!}$. D'où :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)![k+n-k]}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Par conséquent, **pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k < n$, on a :**
$\boldsymbol{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}$.

2) Soit n et k deux entiers naturels tels que $2 \leq k \leq n - 1$,
$$\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$
D'après ce qui précède, $\binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ et $\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n-1}{k}$.

Alors $\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

Par conséquent, **pour tous les entiers naturels n et k tels que $2 \leq k \leq n - 1$, on a :**
$\boldsymbol{\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}}$.

3) a) Le tirage est **simultané**. Un tirage de k boules est donc une **combinaison** de k éléments pris parmi n. Les boules sont toutes indiscernables au toucher et l'expérience est soumise au hasard, l'expérience est donc **équiprobable**.

L'événement $\overline{A}$, événement contraire de A, est l'événement : « Aucune boule rouge n'est tirée ». Puisqu'il y a 2 boules rouges, il y a $n - 2$ boules blanches.

Pour satisfaire l'événement $\overline{A}$, on tire alors k boules parmi $n - 2$ boules.

$$p(\mathrm{A}) = \boldsymbol{p(\overline{A})} = \frac{\binom{n-2}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \boldsymbol{\frac{(n-2)!}{n!} \times \frac{(n-k)!}{(n-2-k)!}}.$$

Comme A est l'événement contraire de $\overline{A}$, alors $p(A) = 1 - p(\overline{A})$. D'où :

$p(A) = 1 - \frac{(n-2)!(n-k)!}{n!(n-2-k)!} = \frac{n!(n-2-k)! - (n-2)!(n-k)!}{n!(n-2-k)!}$, c'est-à-dire,

$$p(A) = \frac{(n-2)!(n-2-k)![n(n-1)-(n-k)(n-k-1)]}{n!(n-2-k)!} = \frac{[n(n-1)-(n-k)(n-k-1)]}{n(n-1)}.$$

Par conséquent, $\boldsymbol{p(A) = \frac{[n(n-1)-(n-k)(n-k-1)]}{n(n-1)} = \frac{2kn-k^2-k}{n(n-1)}}$.

b) L'événement : « Au moins une boule est tirée » signifie que « parmi les boules tirées, soit une boule est rouge, soit deux boules sont rouges ».

Soit A_1 l'événement : «parmi les boules tirées, une est rouge », et A_2 l'événement : «parmi les boules tirées, une est rouge ».

Alors $p(A) = p(A_1) + p(A_2)$

• Calcul de $p(A_1)$: Une boule est rouge parmi les deux rouges. Donc il y a $k - 1$ boules blanches qui sont aussi tirées parmi les $n - 2$ boules blanches.

D'où : $p(A_1) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n}{k}} = 2\dfrac{\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n}{k}}$.

• Calcul de $p(A_2)$: Deux boules rouges sont tirées parmi les deux rouges. Donc il y a $k - 2$ boules blanches qui sont aussi tirées parmi les $n - 2$ boules blanches.

D'où : $p(A_2) = \dfrac{\binom{2}{2}\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \dfrac{\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n}{k}}$.

• Conclusion : $p(A) = p(A_1) + p(A_2) = 2\dfrac{\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n}{k}} + \dfrac{\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \dfrac{2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}}$.

D'après la question 2), $\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}$.

Donc p(A) $\boldsymbol{p(A)} = \dfrac{\binom{n}{k} - \binom{n-2}{k}}{\binom{n}{k}} \boldsymbol{= 1 - \dfrac{\binom{n-2}{k}}{\binom{n}{k}}}$.

On retrouve ainsi, le résultat de la question 3) a).