

**Propriétés :** Soit  $n$  et  $p$  des entiers naturels tels que  $p \leq n - 1$ .

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$  (avec  $n \geq 1$ )
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ .

**Démonstrations :**

- L'ensemble  $F$  ne comporte qu'une partie « vide » et une seule partie ayant  $n$  éléments,

l'ensemble  $F$  lui-même, donc :  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .

- Si une partie  $A$  de  $F$  possède  $p$  éléments, la partie complémentaire de  $A$ , c'est-à-dire la partie contenant les éléments de  $F$  non éléments de  $A$ , en possède  $n - p$  ; il y a donc autant de parties à  $p$  éléments que de parties à  $n - p$  éléments.

- Il y a  $n$  parties ayant 1 élément et il y a aussi  $n$  parties à  $n - 1$  éléments.

- $F$  est un ensemble de  $n$  éléments,  $a$  est l'un d'eux ;  $F$  contient donc  $n - 1$  éléments autres que  $a$ . Soit  $A$  une partie de  $F$  ayant  $p$  éléments.

Deux cas peuvent se produire : soit  $a \in A$ , soit  $a \notin A$ .

Si  $a \in A$ , les  $p - 1$  autres éléments de  $A$  sont choisis parmi les  $n - 1$  éléments de  $F$ .

Si  $a \notin A$ , les  $p$  éléments de  $A$  sont choisis parmi  $n - 1$  éléments de  $F$ , d'où la formule :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

On peut aussi démontrer cette formule par le calcul.