

Partie A : restitution organisée de connaissances

Pré requis : On rappelle les deux résultats suivants :

❶ Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ r \geq 0 \end{cases}$$

❷ Pour tous nombres réels a et b :
$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Démontrer les relations : $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ et $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ à 2π près.

Partie B

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si z est un nombre complexe, \bar{z} désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z .

- 1) Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors z^4 est un nombre réel.
- 2) Si $z + \bar{z} = 0$, alors $z = 0$.
- 3) Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
- 4) Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.