Partie A : restitution organisée de connaissances

Soit deux nombres complexes non nuls $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.
Alors $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.
D'où : $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\right]$.
Or $\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ et $\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$.
On en déduit que : $z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$; de plus, $r_1 r_2 \geq 0$.
Par conséquent, $|\boldsymbol{z_1 z_2}| = r_1 r_2 = |\boldsymbol{z_1}||\boldsymbol{z_2}|$ **et** $\mathbf{arg}(\boldsymbol{z_1 z_2}) = \theta_1 + \theta_2 = \mathbf{arg}(\boldsymbol{z_1}) + \mathbf{arg}(\boldsymbol{z_2})$ **à** $\boldsymbol{2\pi}$ **près**.

Partie B

1) Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors $z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4}i - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}i$; d'où : $z^4 = \left(-\frac{1}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{4}$.
Donc **la proposition « si** $\boldsymbol{z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$ **, alors** z^4 **est un nombre réel » est VRAIE**.

2) **La proposition « si** $\boldsymbol{z + \bar{z} = 0}$ **, alors** $z = 0$ **» est FAUSSE**.
En effet, prenons $z = i$; alors $i + \bar{i} = 0$. Pourtant $i \neq 0$.

3) Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = -\frac{1}{z}$; d'où : $z^2 = -1$. Donc $z = i$ ou $z = -i$.
Donc **la proposition « si** $\boldsymbol{z + \frac{1}{z} = 0}$ **, alors** $\boldsymbol{z = i}$ **ou** $\boldsymbol{z = -i}$ **» est VRAIE**.

4) **La proposition « si** $\boldsymbol{|z| = 1}$ et si $\boldsymbol{|z + z'| = 1}$**, alors** $\boldsymbol{z' = 0}$ **» est FAUSSE**.
En effet, prenons $z = i$; alors $|i| = 1$.
Soit $z' = \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$, alors $|z' + i| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$.
Pourtant $z' \neq 0$.