

Théorème *Module d'un produit, d'un quotient de nombres complexes*

Soient les nombres complexes z et z'

Alors on a :

- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$

Démonstration :

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= zz' \times \overline{zz'} \\ &= zz' \times \overline{z} \overline{z'} \\ &= z \overline{z} \times z' \overline{z'} \\ &= |z|^2 \times |z'|^2 \end{aligned}$$

Le module d'un nombre complexe est positif, on en déduit donc :

$$|zz'| = |z| \times |z'|$$

Supposons $zz' = 1$ alors on a $|zz'| = |z| \times |z'| = 1$

et pour $z' \neq 0$: $\left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|}$

On a alors : $\left| z \times \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

D'où le résultat.

Théorème *Argument du produit, du quotient d'un nombre complexe*

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors on a :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Démonstration :

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos a + i \sin b) \times r'(\cos a' + i \sin b') \\ &= rr' \times (\cos a + i \sin b) \times (\cos a' + i \sin b') \\ &= rr'[(\cos a \cos a' - \sin b \sin b') + i(\cos a \sin b' + \sin b \cos a')] \\ &= rr'[\cos(a + a') + i \sin(a + a')] \end{aligned}$$

on a alors $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Si $zz' = 1$ alors $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

d'où $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z') + 2k\pi$ avec $z' \neq 0$

Conclusion : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$