

Théorème (admis) : Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I et une fonction v dérivable en $u(x)$ pour tout x appartenant à I . La fonction composée $v \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout x appartenant à I , $(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)$

ou encore
$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$$

Voici le principe de la démonstration : On donne ici l'idée de la démonstration sans expliciter les expressions des termes qui tendent vers 0.

Soit x_0 appartenant à I ; par hypothèse, u est dérivable en x_0 , donc :

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu'(x_0) + h\varphi(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

On peut alors écrire : $v(u(x_0 + h)) = v(u(x_0) + k)$ en prenant $k = hu'(x_0) + h\varphi(h)$.

Or, lorsque h tend vers 0, $hu'(x_0) + h\varphi(h)$ tend vers 0, et puisque v est dérivable en $u(x_0)$, on peut écrire : $v(u(x_0) + k) = v(u(x_0)) + kv'(u(x_0)) + k\psi(k)$, avec $\lim_{k \rightarrow 0} \psi(k) = 0$

Donc, $v(u(x_0) + k) = v(u(x_0)) + (hu'(x_0) + h\varphi(h))v'(u(x_0)) + k\psi(k)$, c'est-à-dire

$$v(u(x_0) + k) = v(u(x_0)) + hu'(x_0)v'(u(x_0)) + (\text{un terme tendant vers 0 quand } h \text{ tend vers 0})$$

Par conséquent,
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(u(x_0) + k) - v(u(x_0))}{h} = u'(x_0) \times v'(u(x_0)).$$