

Exercice donné en France en septembre 2007

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1. Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue.

On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

P : Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur \mathbf{R} , de dérivée f' donnée sur \mathbf{R} par : $f'(x) = nx^{n-1}$.

Q : Soit u une fonction dérivable sur \mathbf{R} et soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f = u^n$; alors f est dérivable sur \mathbf{R} , de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

2. On désigne par g la fonction définie sur $] -1 ; 1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g'

désigne la dérivée de la fonction g sur $] -1 ; 1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère alors la fonction composée h définie sur $] -\pi ; 0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.

a) Démontrer que pour tout x de $] -\pi ; 0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h .

b) Calculer $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, puis donner l'expression de $h(x)$.