1. Restitution organisée de connaissances

1) **La proposition P est vraie**.

Démontrons-le par récurrence : soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, la fonction f_n est dérivable sur **R**, de dérivée f_n' donnée sur **R** par : $f_n'(x) = nx^{n-1}$ »

→ *Initialisation* : La fonction f_2, définie sur **R** par $f_2(x) = x^2$, est dérivable sur **R** et $f_2'(x) = 2x$; alors on a $\mathscr{P}(2)$ qui est vraie.

→ *Hérédité* : Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors : la fonction f_n est dérivable sur **R**, de dérivée f_n' donnée sur **R** par : $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

On en déduit que f_{n+1} est dérivable sur **R** en tant que produit de deux fonctions f_n et $u : x \mapsto x$ dérivables sur **R**.

Pour tout réel x,

$f_{n+1}'(x) = f_n'(x) \times u(x) + f_n(x) \times u'(x) = nx^{n-1} \times x + x^n \times 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n$

On en déduit que $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie.

→ Conclusion : on a alors prouvé :

$\mathscr{P}(2)$ et pour tout n supérieur ou égal à 2, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n + 1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout n supérieur ou égal à 2, $\mathscr{P}(n)$ est vraie

C'est-à-dire : **pour tout *n* entier naturel supérieur strictement à 1**, **la fonction *f* définie sur R par $f(x) = x^n$; alors *f* est dérivable sur R, de dérivée f' donnée sur R par : $f'(x) = nx^{n-1}$**.

2) **La proposition Q est fausse**.

Par exemple, prenons la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (2x+1)^2$.

On a $f = v \circ u$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^2$.

La fonction f est dérivable sur **R** en tant que composée de deux fonctions dérivable sur **R**, telles que $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$.

Pour tout réel x, $f'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x) = 2 \times (2(2x+1)) = 4(2x+1)$.

Or $2 \times u^{2-1}(x) = 2(2x+1)$. Donc, $(u^2)' \neq 2u^{2-1}$.

2. a) La fonction cosinus est dérivable sur **R**, donc sur $]-\pi\ ;\ 0[$. De plus, l'image de cet intervalle par la fonction cosinus est l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$ (la fonction cosinus étant strictement croissante sur $]-\pi\ ;\ 0[$). Or la fonction g est dérivable par hypothèse sur $]-1\ ;\ 1[$; par conséquent, la fonction h est dérivable sur $]-\pi\ ;\ 0[$ comme composée de fonctions dérivables. Soit x un réel de $]-\pi\ ;\ 0[$,

$$h'(x) = (\cos)'(x) \times g'(\cos x) = (-\sin x) \times \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{-\sin x}{|\sin x|}.$$

Or pour tout x de $]-\pi\ ;\ 0[$, $\sin x \leq 0$; par suite, $|\sin x| = -\sin x$.

Par conséquent, **pour tout x de $]-\pi\ ;\ 0[$, $h'(x) = 1$**.

b) $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = g(0) = \mathbf{0}$.

Comme pour tout x de $]-\pi\ ;\ 0[$ on a $h'(x)=1$, alors $h(x)=x+k$ où k est une constante réelle. Or $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, alors $-\frac{\pi}{2}+k=0$, c'est-à-dire $k=\frac{\pi}{2}$.

On en déduit que, **pour tout $\boldsymbol{x}$ de $]-\pi\ ;\ 0[$, $\boldsymbol{h(x)=x+\frac{\pi}{2}}$**.