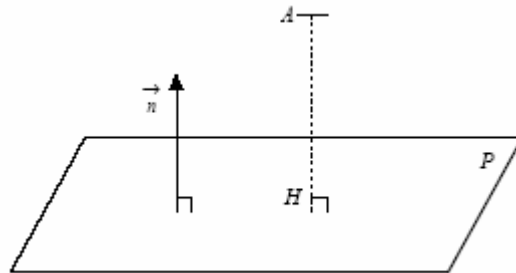


Propriété : Soit (P) un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormal et M_0 un point de l'espace de coordonnées $(x_0 ; y_0 ; z_0)$.

La distance du point M_0 au plan (P) est égale à $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Démonstration :



Soit A un point de l'espace, et H le projeté orthogonal de A sur le plan (P) .

Soit (P) un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, alors un vecteur normal de (d) est

$\vec{n}(a ; b ; c)$. Alors on peut dire que les vecteurs \vec{n} et \overline{AH} sont colinéaires.

On peut calculer $\vec{n} \cdot \overline{AH}$ de deux façons différentes.

• D'une part, \vec{n} étant un vecteur normal de (d) , les vecteurs \vec{n} et $\overline{H_0M_0}$ sont colinéaires et alors :

$$\vec{n} \cdot \overline{AH} = \|\vec{n}\| \times \|\overline{AH}\| \quad \text{ou} \quad \vec{n} \cdot \overline{AH} = -\|\vec{n}\| \times \|\overline{AH}\| ; \quad \text{donc} : |\vec{n} \cdot \overline{AH}| = \|\vec{n}\| \times AH \quad (1).$$

• D'autre part, en utilisant l'expression analytique du produit scalaire, on obtient :

$$\vec{n} \cdot \overline{AH} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) + c(z_H - z_A) = ax_A + by_A + cz_A + d, \quad \text{car, } H \text{ appartenant à } (P), \\ ax_H + by_H + cz_H + d = 0.$$

$$\text{Donc } |\vec{n} \cdot \overline{AH}| = |ax_A + by_A + cz_A + d| \quad (2).$$

$$\text{D'après (1) et (2), et comme } \|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \text{alors } AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$