Propriété : Soit (d) une droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans un repère orthonormal et M_0 un point du plan de coordonnées (x_0 ; y_0).

La distance du point M_0 à la droite (d) est égale à $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Démonstration : Soit A un point de la droite (d), et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur la droite (d).

Comme (d) a pour équation $ax + by + c = 0$, alors un vecteur normal de (d) est $\vec{n}$ (a ; b). On peut calculer $\vec{n} \bullet \overrightarrow{H_0M_0}$ de deux façons différentes.

• D'une part, $\vec{n}$ étant un vecteur normal de (d), les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{H_0M_0}$ sont colinéaires et alors :

$\vec{n} \bullet \overrightarrow{H_0M_0} = \|\vec{n}\| \times \|\overrightarrow{H_0M_0}\|$ ou $\vec{n} \bullet \overrightarrow{H_0M_0} = -\|\vec{n}\| \times \|\overrightarrow{H_0M_0}\|$; donc : $|\vec{n} \bullet \overrightarrow{H_0M_0}| = \|\vec{n}\| \times H_0M_0$ (1).

• D'autre part, $\vec{n} \bullet \overrightarrow{H_0M_0} = \vec{n} \bullet \left(\overrightarrow{H_0A} + \overrightarrow{AM_0}\right) = \vec{n} \bullet \overrightarrow{H_0A} + \vec{n} \bullet \overrightarrow{AM_0} = \vec{n} \bullet \overrightarrow{AM_0}$, car les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{H_0A}$ sont orthogonaux.

Donc, en utilisant l'expression analytique du produit scalaire, on obtient :

$\vec{n} \bullet \overrightarrow{H_0M_0} = \vec{n} \bullet \overrightarrow{AM_0} = a(x_0 - x_A) + b(y_0 - y_A) = ax_0 + by_0 + c$, car, A appartenant à (d), $-ax_A - by_A = c$.

Donc $|\vec{n} \bullet \overrightarrow{H_0M_0}| = |ax_0 + by_0 + c|$ (2).

D'après (1) et (2), et comme $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, alors $H_0M_0 = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exemple : Soit la droite (d) dont une équation est $4x - 3y + 3 = 0$ et $M_0(-1 ; 2)$.

La distance de M_0 à (d) est $\frac{|-4 - 3 \times 2 + 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{5}$.