Pondichéry, avril 2006

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Partie A

Cette partie constitue une restitution organisée de connaissances.
Soient a, b, c et d des réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Soit P le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$. On considère le point I de coordonnées (x_I,y_I,z_I) et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a,b,c).
Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan P est égale à $\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

1) Soit la droite Δ passant par I et orthogonale au plan P. Déterminer en fonction de a, b, c, d, x_I, y_I et z_I un système d'équations paramétriques de Δ.
2) On note H le point d'intersection de Δ et P.
   a) Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH}=k\vec{n}$.
   b) Déterminer l'expression de k en fonction de a, b, c, d, x_I, y_I et z_I.
   c) En déduire que $IH=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Partie B

Le plan Q d'équation $x-y+z-11=0$ est tangent à une sphère S de centre le point Ω de coordonnées $(1;-1;3)$.

1) Déterminer le rayon de la sphère S.
2) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan Q.
3) En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère S et du plan Q.