

**Théorème** : Soit  $a$  un entier naturel non nul, il existe un unique entier  $q$  et un unique entier  $r$  tels que  $a = bq + r$ , avec  $0 \leq r < b$ .

Démonstration :

• **Existence**

On considère les multiples de  $b$  :

...,  $-kb$ ,  $-(k-1)b$ , ...,  $-2b$ ,  $-b$ ,  $0$ ,  $b$ ,  $2b$ , ...,  $kb$ ,  $(k+1)b$ , ... avec  $k$  entier naturel non nul.

→ Si  $a$  est un multiple de  $b$  dans  $\mathbf{Z}$ ,  $a$  est un élément de la liste ci-dessus et il existe un entier relatif  $q$  tel que :  $a = bq$  (1).

→ Si  $a$  n'est pas un multiple de  $b$  dans  $\mathbf{Z}$ , il existe des multiples de  $b$  inférieurs à  $a$  et d'autres supérieurs à  $a$ . Soit  $bq$  le multiple de  $b$  immédiatement inférieur à  $a$ , on peut écrire :  $bq < a < b(q+1)$  (2).

On réunit les cas (1) et (2) en un seul par la double inégalité :  $bq \leq a < b(q+1)$ .

La double inégalité  $bq \leq a < b(q+1)$  équivaut à  $0 \leq a - bq < b$ .

Posons  $r = a - bq$ , on obtient  $a = bq + r$  avec  $0 \leq r < b$ .

• **Unicité**

Démontrons que l'écriture obtenue est unique.

Supposons qu'il existe  $q$  et  $r$  d'une part,  $q'$  et  $r'$  d'autre part tels que :

$a = bq + r$  (3) avec  $0 \leq r < b$  et  $a = bq' + r'$  (4) avec  $0 \leq r' < b$ .

Supposons de plus, par exemple, que  $r' > r$ . Des relations (3) et (4), on déduit que  $r' - r = b(q - q')$  (5).

La relation (5) et  $r' > r$  signifie que  $r' - r$  est un multiple non nul de  $b$ . Or, c'est impossible puisque  $0 \leq r < r' < b$  ; par suite,  $r' - r$  est nécessairement nul donc  $r' = r$  et  $q' = q$ .