

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On prendra 2 cm pour unité graphique.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1) Question de cours

Soit Ω un point du plan complexe d'affixe ω , et θ un nombre réel.

Démontrer que l'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes que vous déterminerez en fonction de ω et de θ .

2) a) Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Placer les points A , B et B' .

3) On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z + 1$.

a) Montrer que B a pour image B' par f .

b) Montrer que A est le seul point invariant par f .

c) Établir que pour tout nombre complexe z distinct de i , $\frac{z' - z}{i - z} = -i$.

Interpréter ce résultat en termes de distances, puis en termes d'angles.

En déduire une méthode de construction de M' à partir de M , pour M distinct de A .

4) a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 2| = \sqrt{2}$.

b) Démontrer que $z' - 3 - 2i = (1+i)(z - 2)$.

En déduire que si le point M appartient à Σ_1 , alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2 , dont on précisera le centre et le rayon.

c) Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A , B et B' .