1) **Question de cours**

Soit $M \neq \Omega$, $M'$ est l'image de $M$ par la rotation de centre $\Omega$, d'affixe $\omega$, et d'angle $\theta$, si et seulement si, $\frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Or : $\frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ équivaut à $\frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = 1$, c'est-à-dire à $\left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1$, et

$\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ équivaut à $\arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

D'où : $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = 1 \times e^{i\theta}$, c'est-à-dire $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta} = e^{i\theta}z - \omega e^{i\theta}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{z' = az + b}$ **avec** $\boldsymbol{a = e^{i\theta}}$ **et** $\boldsymbol{b = \omega - \omega e^{i\theta}}$.

2) a) L'écriture complexe de l'homothétie de centre $A$ et de rapport $\sqrt{2}$ est :
$z' - i = \sqrt{2}(z - i)$.

Comme $B_1$ est l'image de $B$ par cette homothétie, alors $z_{B_1} - i = \sqrt{2}(z_B - i)$.

D'où $\boldsymbol{z_{B^1}} = \sqrt{2}(2 - i) + i \boldsymbol{= 2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2})}$.

b) D'après la question 1), comme $B'$ est l'image de $B_1$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, alors $z_{B'} - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_{B_1} - i)$.

D'où : $z_{B'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2\sqrt{2} + i\left(1 - \sqrt{2}\right) - i\right) + i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\left(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) + i = (1 + i)(2 - i) + i$.

Par conséquent, $\boldsymbol{z_{B'} = 3 + 2i}$.

3) a) $(1 + i)z_B + 1 = 2(1 + i) + 1 = 2 + 2i + 1 = 3 + 2i = z_{B'}$.

Par conséquent, ***B*** **a pour image** ***B'*** **par** ***f*****.**

b) Le point $M$ d'affixe $z$ est invariant par $f$ si, et seulement si, $f(M) = M$, c'est-à-dire si, et seulement si, $z' = z$.

Or $z' = z \iff (1 + i)z + 1 = z$

$\iff iz + 1 = 0$

$\iff z = -\frac{1}{i} = i = z_A$

Par conséquent, ***A*** **est le seul point invariant par** ***f***.

c) Soit $z$ un nombre complexe distinct de $i$, $\frac{z' - z}{i - z} = \frac{(1 + i)z + 1 - z}{i - z} = \frac{iz + 1}{i - z} = \frac{-i(-z + i)}{i - z} = -i$.

Donc, **pour tout nombre complexe** ***z*** **distinct de** ***i*****,** $\boldsymbol{\frac{z' - z}{i - z} = -i}$.

D'après ce qui précède, on déduit que :

$\left|\frac{z' - z}{i - z}\right| = |-i|$, c'est-à-dire $\frac{|z' - z|}{|i - z|} = 1$ ou encore $\boldsymbol{\frac{MM'}{MA} = 1}$ ;

et $\arg\left(\frac{z' - z}{i - z}\right) = \arg(-i)$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})}$.

Si $M$ est distinct de $A$, alors, d'après ce qui précède, on en déduit que le triangle $AMM'$ est rectangle et isocèle en $M$. On construit donc un cercle de centre $M$ passant par $A$ ; **$M'$ est alors le point d'intersection de la médiatrice du segment $[AM]$ et du cercle précédent**.

4) a) Soit $M$ un point du plan d'affixe $z$. $|z-2|=\sqrt{2}$ équivaut à $BM=\sqrt{2}$.

Par conséquent, **$\Sigma_1$ est le cercle de centre $B$ et de rayon $\sqrt{2}$**.

b) $z'-3-2i=(1+i)z+1-3-2i=(1+i)z-2-2i=(1+i)z-2(1+i)$.

Donc $\boldsymbol{z'-3-2i=(1+i)(z-2)}$.

Si le point $M$, d'affixe $z$, appartient à $\Sigma_1$, alors $|z-2|=\sqrt{2}$.

Or, d'après la question précédente, $|z'-3-2i|=|1+i||z-2|$ ; d'où : $|z'-3-2i|=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$, c'est-à-dire $B'M'=2$. Donc $M'$ appartient au cercle de centre $B'$ et de rayon 2.

Par conséquent, **si le point $M$ appartient à $\Sigma_1$, alors son image $M'$ par $f$ appartient à un cercle $\Sigma_2$ de centre $B'$ et de rayon 2**.

c)