a) Translation

Théorème 1 : Soit a un nombre complexe.
L'application, définie sur **C**, par $z \mapsto z+a$ est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a.

Démonstration : Soit M et M' deux points du plan d'affixes respectives z et z'.
M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$, donc si et seulement les affixes de ces vecteurs sont égales : $z'-z=a$, soit $z'=z+a$.

b) Homothétie

Théorème 2 : Soit k un réel non nul.
• L'application, définie sur **C**, par $z \mapsto kz$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k.
• L'application, définie sur **C**, par $z \mapsto z'$ avec $z'-\omega=k(z-\omega)$, est l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k.

Démonstration : $M'=f(M)$ équivaut à $\overrightarrow{\Omega M'}=k\ \overrightarrow{\Omega M}$, soit $z'-\omega=k(z-\omega)$.

c) Rotation de centre Ω et d'angle θ

Théorème 3 : L'application, définie sur **C**, par $z \mapsto z'$ avec $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$, est l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ.

Démonstration : Soit $M \neq \Omega$, M' est l'image de M par la rotation de centre Ω, d'affixe ω, et d'angle θ, si et seulement si, $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}=1$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M},\ \overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta+2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Or : $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}=1$ équivaut à $\dfrac{|z'-\omega|}{|z-\omega|}=1$, c'est-à-dire à $\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=1$, et

$\left(\overrightarrow{\Omega M},\ \overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta+2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ équivaut à $\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)=\theta+2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

D'où : $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}=1\times e^{i\theta}$, c'est-à-dire $z'-\omega=(z-\omega)e^{i\theta}$.