Exercice donné en avril 2008 à Pondichéry

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

a) Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.

Alors $\left|\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \quad (2\pi)$.

b) Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :

$z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

<u>*Démonstration de cours*</u> : Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $\left(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1) a) Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

b) Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v}\right)$?

c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2) On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.

a) Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précèdent ?

b) Donner l'écriture complexe de r.

c) Déterminer l'affixe du point E.