Partie A

Démonstration de cours : la rotation *r* d'angle α et de centre Ω d'affixe ω envoie *M*(*z*) sur *M*'(*z*') de sorte que $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = 1.e^{i\alpha} \Leftrightarrow z'-\omega = e^{i\alpha}(z-\omega)$.

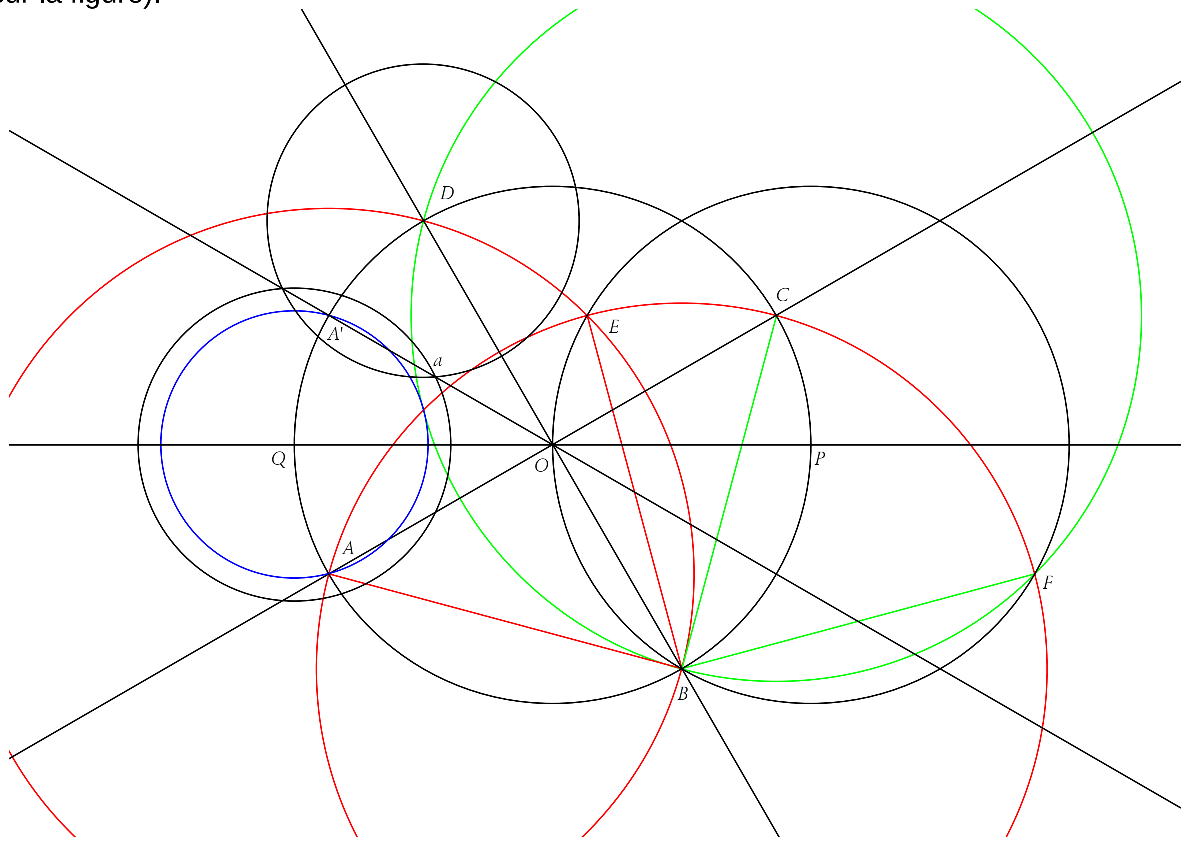
Partie B

$z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1. a. $z_A = -\sqrt{3} - i = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$; $z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$;

$z_C = \sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_D = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b. Les points sont sur le cercle de centre *O*, de rayon 2 (cercle de diamètre [*PQ*]) ; *B* est un sommet de triangle équilatéral, *D* est diamétralement opposé à *B*, *A*' est sur la bissectrice de $\widehat{QOD}$ et A est tel que l'arc $\widehat{AQ} = \widehat{QA'}$; *C* est diamétralement opposé à *A* (traits pointillés noirs sur la figure).



c. Le quadrilatère *ABCD* est un rectangle (c'est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu et les deux diagonales sont de même longueur). C'est même un carré car les diagonales sont à angle droit (calculer l'angle).

2. a. Puisqu'il s'agit de triangles équilatéraux, on construit les deux cercles de rayon *AB*, de centre *A* et de centre *B* ; une des deux intersections est *E* ; même chose avec les cercles de rayon *BC*, de centres *B* et *C* (en rouge et vert sur la figure).

b. $z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_B) \Leftrightarrow z' - 1 + i\sqrt{3} = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - 1 + i\sqrt{3}\right)$.

c. $z_E - 1 + i\sqrt{3} = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z_A - 1 + i\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow z_E = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3} - i - 1 + i\sqrt{3}\right) + 1 - i\sqrt{3}$, soit

$$z_E = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} - i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 1 - i\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + i.$$