__Théorème__ : La fonction exponentielle est la seule fonction dérivable f sur **R**, non nulle, telle que $f(a+b)=f(a)\times f(b)$ et $f'(0)=1$.

Démonstration : On sait que la fonction exponentielle vérifie les quatre conditions : fonction dérivable sur **R**, non nulle, $f(a+b)=f(a)\times f(b)$ et $f'(0)=1$.
Soit f une autre fonction vérifiant ces quatre conditions. Pour a réel fixé et x réel quelconque, $f(x+a)=f(x)\times f(a)$. Or, la fonction $x\mapsto f(x+a)$ est dérivable sur **R** d'après le théorème de dérivation d'une fonction composée et la fonction $x\mapsto f(x)\times f(a)$ est dérivable sur **R**.
Donc, en dérivant les deux membres de cette égalité, on obtient $f'(x+a)=f'(x)\times f(a)$.
D'où, pour $x = 0$, $f'(a)=f'(0)\times f(a)$ et puisque $f'(0)=1$, alors $f'(a)=f(a)$ pour tout réel a.
La fonction f est donc une solution de l'équation $f'=f$.
De plus, $f(0+a)=f(0)\times f(a)$, c'est-à-dire $f(a)=f(0)\times f(a)$. Or $f(a)$ est non nul, donc $f(0)=1$.
Ainsi f est solution de l'équation différentielle $f'=f$ et $f(0)=1$.
On en déduit que f est la fonction exponentielle.