1) Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connu le résultat suivant :

« La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur **R** telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$. »

Soit a un réel donné.

a) Montrer que la fonction f définie sur **R** par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b) Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur **R** par

$h(x) = g(x)e^{-ax}$.

Montrer que h est une fonction constante.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

2) On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos(x)$.

a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur **R** par :

$f_0(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ soit une solution de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

c) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d) En déduire les solutions de (E).

e) Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.