1) a) On remarque que $f = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = ax$.
La fonction u est dérivable sur **R**, alors f est dérivable sur **R**.
$f' = u'\mathrm{e}^u$ avec $u'(x) = a$. D'où, pour tout réel x, $f'(x) = a\ \mathrm{e}^{ax}$, c'est-à-dire que $f'(x) = a\ f(x)$.
Par conséquent, **la fonction *f* est solution de l'équation $y' = ay$**.

b) Soit h la fonction définie sur **R** par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$.
La fonction h est dérivable sur **R** en tant que produit de deux fonctions f et g dérivables sur **R**. Alors pour tout réel x,
$h'(x) = g'(x)f(x) + g(x)f'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{-ax} + g(x)\left(-a\mathrm{e}^{-ax}\right) = \left(g'(x) - ag(x)\right)\mathrm{e}^{-ax}$.
Comme g est une solution de l'équation $y' = ay$, alors $g'(x) - ag(x) = 0$ pour tout réel x.
Par suite, $h'(x) = 0$ pour tout réel x.
Par conséquent, ***h* est une fonction constante**.

c) D'après la question précédente, on en déduit que lorsque g est une solution de l'équation $y' = ay$, on a : $g(x)\mathrm{e}^{-ax} = C$ où C est une constante réelle.
D'où : $g(x) = \dfrac{C}{\mathrm{e}^{-ax}} = C\mathrm{e}^{ax}$ où C est une constante réelle.
Par conséquent, **les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions *g* définies sur R par $g(x) = C\ \mathrm{e}^{ax}$ où *C* est une constante réelle**.

2) a) Soit un réel x.

$$
\begin{aligned}
f_0 \text{ est une solution de } (\mathrm{E}) \quad &\Leftrightarrow \quad f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos(x), \text{ pour tout réel } x \\
&\Leftrightarrow \quad -a\sin(x) + b\cos(x) = 2\left(a\cos(x) + b\sin(x)\right) + \cos(x) \\
&\Leftrightarrow \quad -a\sin(x) + b\cos(x) = 2\left(a\cos(x) + b\sin(x)\right) + \cos(x) \\
&\Leftrightarrow \quad -a\sin(x) + b\cos(x) = (2a+1)\cos(x) + 2b\sin(x), \text{ pour tout réel } x
\end{aligned}
$$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} 2a + 1 = b \\ 2b = -a \end{cases}$.

Or $\begin{cases} 2a + 1 = b \\ 2b = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2 = -a \\ 2b = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = -2 \\ b = -\dfrac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{5} \\ b = \dfrac{1}{5} \end{cases}$.

Par conséquent, **la fonction f_0 définie sur R par $f_0(x) = -\dfrac{2}{5}\cos(x) + \dfrac{1}{5}\sin(x)$ est une solution de (E)**.
b) **Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions définies sur R par $x \mapsto C\ \mathrm{e}^{2x}$ où *C* est une constante réelle**.

c) • Soit f une solution de (E). Alors, pour tout réel x, $f'(x) = 2f(x) + \cos(x)$ (1).
Comme f_0 est une solution de (E), pour tout réel x, $f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos(x)$ (2).
En soustrayant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient que :
$f'(x) - f_0'(x) = 2f(x) - 2f_0(x)$, c'est-à-dire $f' - f_0' = 2f - 2f_0$, ou encore $(f - f_0)' = 2(f - f_0)$.
Donc, $f - f_0$ est une solution de (E_0).

• Réciproquement, supposons que $f - f_0$ soit une solution de (E_0).

Alors $(f - f_0)'(x) = 2(f - f_0)(x)$, pour tout réel x.

D'où : $f'(x) = 2f(x) + f_0'(x) - 2f_0(x) = 2f(x) + \cos(x)$, car f_0 est une solution de (E).
Par conséquent, f est une solution de (E).

• ***<u>Conclusion</u>*** : **f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0)**.

d) D'après les questions 2) b) et 2) c), on déduit que $(f - f_0)(x) = C\ \mathrm{e}^{2x}$, c'est-à-dire $f(x) = f_0(x) + C\ \mathrm{e}^{2x}$.
Par conséquent, **les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur R par $\boldsymbol{f(x) = -\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x) + C\ \mathrm{e}^{2x}}$**.

e) Comme k est une solution de (E), alors $k(x) = -\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x) + C\ \mathrm{e}^{2x}$.

Or $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, alors : $-\frac{2}{5} + C\ \mathrm{e}^{\pi} = 0$ ou encore $C = \frac{\frac{2}{5}}{\mathrm{e}^{\pi}} = \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\pi}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{k(x) = -\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x) + \frac{2}{5}\mathrm{e}^{2x-\pi}}$.