

1) **Démonstration de cours :**

Soit l'équation différentielle $y' = ay$ (1).

La fonction f_1 définie par $f_1(x) = e^{ax}$ est telle que $f_1'(x) = a e^{ax}$.

On a $f_1' = af_1$, donc la fonction f_1 est une solution particulière de (1).

Cherchons les solutions de (1) sous la forme $f(x) = g(x)e^{ax}$.

La fonction g est dérivable sur \mathbf{R} car f_1 et f le sont.

On a : $f'(x) = g'(x)e^{ax} + g(x)(ae^{ax}) = (g'(x) + ag(x))e^{ax}$.

D'où en remplaçant dans (1), on obtient : $(g'(x) + ag(x))e^{ax} = ag(x)e^{ax}$.

Par conséquent, $g'(x)e^{ax} = 0$; or e^{ax} ne s'annule pas sur \mathbf{R} .

Donc, g' est la fonction nulle sur \mathbf{R} et il existe une constante réelle C telle que, sur \mathbf{R} , $g(x) = C$. On obtient bien $f(x) = Ce^{ax}$.

2) L'équation différentielle : $y' = ay - 20a$ est équivalente à l'équation différentielle $(y - 20)' = a(y - 20)$. Alors, d'après le 1), $y - 20 = Ce^{ax}$ où C est une constante.

Par conséquent, **les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur \mathbf{R} par $y \mapsto 20 + Ce^{ax}$ où C est une constante.**

3) Comme $\theta'(t)$ est proportionnel à la différence entre la température $\theta(t)$ et celle de la pièce, il existe un réel a tel que $\theta' = a(\theta - 20)$.

Alors, d'après 2), $\theta(t) = 20 + Ce^{at}$ où C est une constante.

La température du liquide 30 minutes après l'instant initial sera donc $\theta(30)$.

Pour calculer ce nombre, nous devons préalablement chercher C et a .

• Recherche de C : $\theta(0) = 20 + Ce^0 = 70$, d'où **$C = 50$** .

• Recherche de a : $\theta(60) = 20 + 50e^{5a} = 60$, d'où $e^{5a} = \frac{60 - 20}{50} = \frac{4}{5}$. Alors, $5a = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$, c'est-

à-dire $a = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{4}{5}\right)$.

Par conséquent, $\theta(30) = 20 + 50e^{\frac{1}{5} \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 30} = 20 + 50e^{6 \ln\left(\frac{4}{5}\right)} = 20 + 50\left(\frac{4}{5}\right)^6 \approx 20 + 50 \times 0,262144 = 20 + 13,1072 = 33,1072$.