

Propriété 1 : Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $f - \frac{b}{a}$ où f est une solution de l'équation $y' = ay$.
Toutes les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à une solution quelconque de $y' = ay$, la constante particulière de (E).

Démonstration : Une fonction g de la forme $f - \frac{b}{a}$ de l'équation $y' = ay$ est une solution de (E)

$$\text{puisque : } g'(x) = f'(x) = a f(x) = a \left(g(x) + \frac{b}{a} \right) = a g(x) + b.$$

Réciproquement, soit g une solution de (E), alors $f = g + \frac{b}{a}$ est une solution de $y' = ay$

$$\text{puisque : } f'(x) = g'(x) = a g(x) + b = a \left(f(x) - \frac{b}{a} \right) + b = a f(x).$$

Propriété 2 : Soient deux réels a et b (a non nul) et un point $A(x_0; y_0)$.

L'équation $y' = ay + b$ admet, dans \mathbf{R} , une solution unique f dont la courbe représentative passe par le point $A(x_0; y_0)$; $f : x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.

On calcule la constante C en exprimant que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration : En utilisant le théorème 6 du chapitre sur la fonction exponentielle et le résultat précédent, on peut dire qu'il existe une constante C telle que $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.

Comme $f(x_0) = y_0$, alors $y_0 = Ce^{ax_0} - \frac{b}{a}$. Il existe donc un réel unique C et $C = \left(y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{-ax_0}$.

On obtient alors la propriété 2.