

Dans ce type d'équation la méthode la plus générale est la plus rentable ; on résout tout d'abord $y' = ay$, soit $\frac{y'}{y} = a \Rightarrow \ln|y| = ax + K \Leftrightarrow |y| = e^{ax+K} = e^K e^{ax} \Leftrightarrow y = \pm C e^{ax}$, C réel positif non nul. Pour trouver la solution de l'équation initiale on pose $C = h(x)$, soit $y = h(x)e^{ax}$ et on remplace dans l'équation :

$$y' = h'(x)e^{ax} + ah(x)e^{ax}, \text{ soit } h'(x)e^{ax} + ah(x)e^{ax} = ah(x)e^{ax} + b \Leftrightarrow h'(x)e^{ax} = b \Leftrightarrow h'(x) = be^{-ax} ;$$

il reste à intégrer h' : $h(x) = -\frac{b}{a}e^{-ax} + K'$ d'où la solution

$$y = \left(-\frac{b}{a}e^{-ax} + K' \right) e^{ax} = K' e^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Connaissant un point tel que $y(x_0) = y_0$ on remplace et on trouve K' ce qui est toujours possible dans ce cas. Comme K' est unique la solution est unique.

Remarque : l'intérêt de la méthode vue ici est qu'elle permet de résoudre de nombreuses équations différentielles de ce type, voire nettement plus compliquées.