Cet exercice fait partie de ceux qui ont été publiés sous la responsabilité de l'Inspection Générale de Mathématiques.

1) **Démonstration de cours**. Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k < n$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

2) En déduire que pour tous les entiers naturels n et k tels que $2 \leq k < n-1$, on a :

$$\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}.$$

3) On considère deux entiers naturels n et k tels que $2 \leq k < n-1$. On dispose d'une urne contenant n boules indiscernables au toucher. Deux des boules sont rouges, les autres sont blanches.

On tire au hasard et simultanément k boules de l'urne. On appelle A l'événement « au moins une boule rouge a été tirée ».

a) Exprimer en fonction de n et de k la probabilité de l'événement $\overline{A}$, contraire de A.
En déduire la probabilité de A.

b) Exprimer d'une autre manière la probabilité de l'événement A et montrer, à l'aide de la formule obtenue à la question 2), que l'on retrouve le même résultat.