

## Partie A : Question de cours

1) **Théorème de Bézout** : Deux entiers  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des entiers  $u$  et  $v$  tels que  $au + bv = 1$ .

**Théorème de Gauss** : Soit  $a, b$  et  $c$  trois entiers naturels non nuls. Si  $a$  divise le produit  $bc$  et s'il est premier avec  $b$ , alors il divise  $c$ .

2) Comme  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que  $au + bv = 1$ . En multipliant l'égalité précédente par  $c$ , on obtient :  
 $cau + cbv = c$ .

Or  $a$  divise  $bc$ , il existe alors un entier  $q$  tel que  $bc = aq$ .

D'où  $cau + cbv = c$  implique que  $cau + aqv = c$ , c'est-à-dire  $a(cu + qv) = c$ .

Comme  $cu + qv$  est un entier, on en déduit que  $a$  divise  $c$ .

## Partie B

1) Comme 12 et 19 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, **il existe un couple  $(u; v)$  d'entiers relatifs tel que :  $19u + 12v = 1$** .

$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ . Or  $12v = 1 - 19u$ , d'où  $N = 13 \times (1 - 19u) + 6 \times 19u = 13 - 7 \times 19u$ ; par suite,  $N \equiv 13 \pmod{19}$ .

De plus,  $19u = 1 - 12v$ , d'où  $N = 13 \times 12v + 6 \times (1 - 12v) = 6 + 7 \times 12v$ ; par suite,

$N \equiv 6 \pmod{12}$ .

Par conséquent, **pour un tel couple, le nombre  $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$  est une solution de  $(S)$** .

2) a) Soit  $n_0$  une solution de  $(S)$ , alors  $\begin{cases} n_0 \equiv 13 \pmod{19} \\ n_0 \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$ , c'est-à-dire  $\begin{cases} n_0 = 13 + 9k_0 \\ n_0 = 6 + 12k'_0 \end{cases}$ ,

avec  $k_0$  et  $k'_0$  des entiers.

De même,  $\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 13 + 19k \\ n = 6 + 12k' \end{cases}$ , avec  $k$  et  $k'$  des entiers.

En soustrayant ligne à ligne les deux systèmes, on obtient :  $\begin{cases} n - n_0 = 19(k - k_0) \\ n - n_0 = 12(k' - k'_0) \end{cases}$ , ce qui

équivaut à  $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ .

Par conséquent, **soit  $n_0$  une solution de  $(S)$ ,  $(S)$  équivaut à  $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$** .

b) Si  $n \equiv n_0 \pmod{19}$ , alors 19 divise  $n - n_0$ ; de même, si  $n \equiv n_0 \pmod{12}$ , alors 12 divise  $n - n_0$ . Comme 12 et 19 sont premiers entre eux, alors  $12 \times 19$  divise  $n - n_0$ , ce qui équivaut à

$n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$ .

Par conséquent,  $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$  équivaut à  $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$ .

3) a) Par la méthode l'algorithme d'Euclide, on obtient :

<b>a</b>	<b>b</b>	<b>reste</b>
19	12	7
12	7	5
7	5	2
5	2	1
2	1	0

En remontant, on a :

$$1 = 5 - 2 \times 2.$$

Or  $2 = 7 - 5$  ; alors :

$$1 = 5 - 2 \times (7 - 5) = 3 \times 5 - 2 \times 7.$$

Or  $5 = 12 - 7$  ; alors :

$$1 = 3 \times (12 - 7) - 2 \times 7 = 3 \times 12 - 5 \times 7.$$

Or  $7 = 19 - 12$  ; alors :

$$1 = 3 \times 12 - 5 \times (19 - 12) = 8 \times 12 - 5 \times 19.$$

Par conséquent, **le couple  $(-5 \quad 8)$  est un couple solution de l'équation  $19u + 12v = 1$ .**

Dans ce cas, **la valeur de  $N$  correspondante est :  $N = 13 \times 12 \times 8 + 6 \times 19 \times (-5) = 678$ .**

b) D'après les questions 2) a) et 2) b), les solutions  $n$  du système ( S ) sont telles que  $n \equiv n_0 \pmod{19 \times 12}$  où  $n_0$  est une solution de ( S ), par exemple 678.

Or  $n \equiv 678 \pmod{12 \times 19} \equiv 678 \pmod{228} \equiv 222 \pmod{228}$ .

Par conséquent, **l'ensemble des solutions de ( S ) est l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $n \equiv 222 \pmod{228}$ .**

4) Trouver un entier naturel  $n$  tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13, revient à résoudre le système ( S ).

D'après la question précédente, cet entier  $n$  est de la forme  $n \equiv 222 \pmod{228}$ .

Par conséquent, **le reste de la division de cet entier par 228 est 222.**