

1. On considère la fonction numérique f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Pour tout réel $\alpha \geq 1$, on considère les intégrales

$$J(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{x} dx \text{ et } K(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{x} \exp\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Le but de l'exercice est d'étudier, sans chercher à la calculer, l'intégrale $K(\alpha)$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b. b. Montrer que la dérivée de f peut s'écrire $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \left(\frac{x+1}{x}\right) \exp\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire le sens de variation de f .

c. Donner l'allure de la courbe C .

2. a. Interpréter géométriquement le nombre $K(\alpha)$.

b. Soit $\alpha \geq 1$, montrer que $\frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \leq K(\alpha) \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

c. En déduire que $\frac{1}{2} \leq K(\alpha) \leq e$.

3. a. Calculer $J(\alpha)$.

b. Démontrer que pour tout réel $\alpha \geq 1$, $\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \ln(2) \leq K(\alpha) \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \ln(2)$.

4. Démonstration de cours.

Démontrer le théorème suivant : soient u, v et w des fonctions définies sur $[1 ; +\infty[$ telles que pour tout réel $x \geq 1$, $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$. S'il existe un réel l tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$.

5. Déduire de ce qui précède la limite de $K(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.