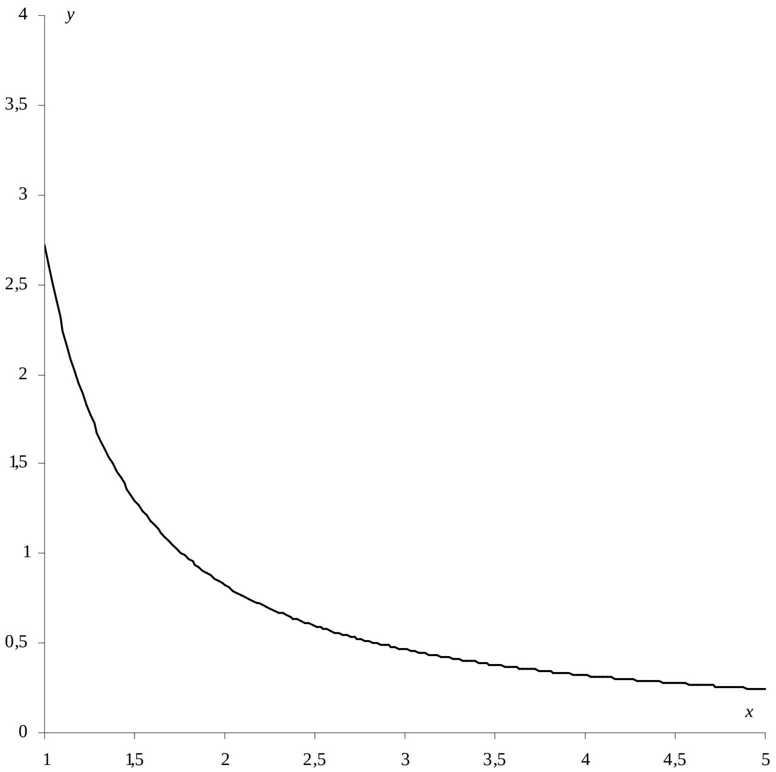
1. $[1\,;+\infty[$, $f(x)=\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$. $\alpha \geq 1$, $J(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}dx$ et $K(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

a. En $+\infty$ $1/x$ tend vers 0 donc f tend vers $0.e^0 = 0$. L'axe horizontal est une asymptote de (C).

b. $f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\left[\left(-\frac{1}{x^2}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right)\left[1+\frac{1}{x}\right]=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left[\frac{x+1}{x}\right]\exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Comme x est supérieur à 1, f' est toujours négative et f est décroissante.

c.



2. a. $K(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)dx$ correspond à l'aire comprise entre la courbe (C) l'axe (Ox) et les droites $x=\alpha$, $x=2\alpha$.

b. Sur l'intervalle $[\alpha, 2\alpha]$, f est décroissante et on a

$$1 \leq \alpha \leq x \leq 2\alpha \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\alpha} \leq 1 \\ f(2\alpha)=\frac{1}{2\alpha}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \leq f(x) \leq f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \end{cases}.$$

Intégrons cette inégalité : $\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{2\alpha}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)dx \leq K(\alpha) \leq \int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)dx$. Or on a

$$\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{2\alpha}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)dx=(2\alpha-\alpha)\frac{1}{2\alpha}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)=\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right),$$

$$\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)dx=(2\alpha-\alpha)\frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

d'où $\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \leq K(\alpha) \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

c. Comme $0 \leq \frac{1}{2\alpha} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\alpha} \leq 1$, $\frac{1}{2}\exp(0) \leq \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \leq K(\alpha) \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq \exp(1)$, soit $\frac{1}{2} \leq K(\alpha) \leq e$.

3. a. $J(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_{\alpha}^{2\alpha}=\ln 2\alpha-\ln\alpha=\ln\frac{2\alpha}{\alpha}=\ln 2$.

b. Comme on a $0 \leq \frac{1}{2\alpha} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\alpha} \leq 1$, on a $1 \leq \exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{x}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq e$, soit en multipliant par 1/x : $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \leq \frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq \frac{1}{x}e$ puis en intégrant :

$\ln 2 \leq (\ln 2)\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \leq K(\alpha) \leq (\ln 2)\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq e\ln 2$.

4. Démonstration de cours : il faut s'attendre à tout avec les méchants professeurs de maths…

5. Lorsque α tend vers $+\infty$, $\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$ et $\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ tendent vers $e^0 = 1$. La limite est donc ln2.