

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.

On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0; +\infty[$, les solutions de l'équation

$$E_a: x^a = a^x.$$

Étude de quelques cas particuliers

1) Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2 .

2) Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a .

3) On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_e .

On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = x - e \ln x$.

a) **Question de cours** : On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\frac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$.

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

b) Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.

c) Étudier les variations de h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

d) Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_e .