1) L'équation E_2 s'écrit $x^2 = 2^x$.
En remplaçant x par 2 dans l'équation précédente, on constate qu'elle est vérifiée car $2^2 = 2^2$.
De même, en remplaçant x par 4 dans l'équation précédente, on constate qu'elle est vérifiée car $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$.
Donc, **les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.**

2) Si on remplace x par a dans l'équation E_a, on constate que $a^a = a^a$. Cette égalité est vraie pour tout réel a strictement positif et différent de 1.
Par conséquent, **le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.**

3) a) Posons $x = \mathrm{e}^t$. Alors $\lim\limits_{t\to+\infty} x = +\infty$, et $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^t\right)}{\mathrm{e}^t} = \dfrac{t}{\mathrm{e}^t} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}}$.

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$; on en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}}\right) = 0$. Par suite, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$.

b) • $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty, \text{ alors } \lim\limits_{x\to 0}(-\mathrm{e}\ln x) = +\infty \end{cases}$. Par somme des limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty}$

• $h(x) = x - \mathrm{e}\ln x = x\left(1 - \mathrm{e}\dfrac{\ln x}{x}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \mathrm{e}\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Par produit des limites, on en déduit que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty}$.

c) La fonction h est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ en tant que somme de deux fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -\mathrm{e}\ln x$, dérivables sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

Alors, pour tout réel x strictement positif, $h'(x) = u'(x) + v'(x) = 1 - \mathrm{e}\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{x-\mathrm{e}}{x}$.

Comme x appartient à $\left]0\,;+\infty\right[$, alors le signe de $h'(x)$ dépend de celui de $(x - \mathrm{e})$.

Par conséquent, **la fonction h est strictement décroissante sur $\left]0\,;\mathrm{e}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\mathrm{e}\,;+\infty\right[$.**

d)

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	$+\infty$
h	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

En effet, $h(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - \mathrm{e}\ln\mathrm{e} = \mathrm{e} - \mathrm{e} = 0$.

D'après le tableau de variation précédent, $h(x) = 0$ si, et seulement si, $x = \mathrm{e}$.

Or $x^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^x \iff \ln\left(x^{\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^x\right)$ car la fonction ln est strictement croissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

D'où : E_{e} équivaut à $\mathrm{e}\ln x = x\ln\mathrm{e} = x$, c'est-à-dire à $h(x) = 0$.

Par conséquent, **l'équation E_{e} admet une seule solution $x = \mathrm{e}$.**