1) Soit $a$ un réel strictement positif. Soit $h$ la fonction définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x)=\ln(ax)-\ln(x)$.

Pour tout réel $x$ strictement positif, $h'(x)=\dfrac{a}{ax}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}=0$.

On en déduit que la fonction $h$ est une fonction constante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Or $h(1)=\ln(a)-\ln(1)=\ln(a)$ car $\ln(1)=0$. Donc, pour tout $x$ de $]0\ ;\ +\infty[$,

$h(x)=\ln(ax)-\ln(x)=h(1)=\ln(a)$.

Par conséquent, **pour tous réels strictement positifs *a* et *x*,** $\boldsymbol{\ln(ax)=\ln(a)+\ln(x)}$.

2) Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs.

$\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)+\ln(b)=\ln\left(\dfrac{1}{b}\times b\right)=\ln(1)=0$ d'après la question précédente.

Donc $\boldsymbol{\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\ln(b)}$ **pour tout réel *b* strictement positif**.

De plus, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\dfrac{1}{b}\right)=\ln(a)+\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.

Par conséquent, **pour tous réels *a* et *b* strictement positifs**, $\boldsymbol{\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)}$.

3) ➢ $\ln 6=\ln 3+\ln 2$ d'après la question 2).

Comme $0{,}69\leq\ln 2\leq 0{,}70$ et $1{,}09\leq\ln 3\leq 1{,}10$, alors $0{,}69+1{,}09\leq\ln 2+\ln 3\leq 0{,}70+1{,}10$.

Donc [illegible] $\boldsymbol{\leq\ln(6)\leq}$ [illegible].

➢ $\ln\left(\dfrac{1}{6}\right)=-\ln 6$. Donc **–** [illegible] $\boldsymbol{\leq\ln\left(\dfrac{1}{6}\right)\leq -}$ [illegible].

➢ $\ln\left(\dfrac{3}{8}\right)=\ln(3)-\ln(8)=\ln(3)-\ln\left(2^3\right)=\ln(3)-3\ln(2)$.

Comme $0{,}69\leq\ln 2\leq 0{,}70$, alors $-2{,}10\leq -3\ln 2\leq -2{,}07$. Or $1{,}09\leq\ln 3\leq 1{,}10$.

Par conséquent, **–** [illegible] $\boldsymbol{\leq\ln\left(\dfrac{3}{8}\right)\leq -}$ [illegible].