On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1) Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.

2) Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3) Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4) On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).