**La *Règle de L'Hopital* (mathématicien français du 18ème siècle)**

Préliminaire : le *Théorème de Rolle*.

Soit $f$ continue sur $[a\,;\,b]$, dérivable sur $]a\,;\,b[$ et $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un point $c$ de $]a\,;\,b[$ tel que $f'(c)=0$.

*Si f est constante tous les points x donnent $f'(x) = 0$. Sinon, comme f est continue sur $[a\,;\,b]$, il existe un point c tel que pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \le f(c) = M$ (si $f(a)$ est différent de M, sinon on fait le même raisonnement avec $f(x) \ge f(c) = m$ ).*

*Soit* $g(x) = \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$, *si* $x>c$, $g(x) \le 0$, *et si* $x<c$, $g(x) \ge 0$ ; *on a donc* $\lim\limits_{x\to c^+} g(x) \le 0$ *et* $\lim\limits_{x\to c^-} g(x) \ge 0$ *d'où* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0 = f'(c)$.

À quel(s) endroit(s) de cette démonstration a-t-on utilisé le TVI ?

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a\,;\,b]$, dérivables sur $]a\,;\,b[$.

1. Soit la fonction $\varphi$ définie par $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$. Calculer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

2. Montrer que $\varphi'(x)$ s'annule sur $]a\,;\,b[$ et qu'il existe $c$ dans $]a\,;\,b[$ tel que

$$g'(c)(f(b)-f(a)) = f'(c)(g(b)-g(a)).$$

3. Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle I , $a$ un point de I, $f$ et $g$ dérivables sur I sauf en $a$ et telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $\forall x \in I, x \ne a \Rightarrow g'(x) \ne 0$.

a. Montrer que si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

b. Montrer que la réciproque est fausse en considérant les fonctions $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = \sin x$.

c. Application : déterminer la limite en 0 de $u(x) = \dfrac{\cos(x^3)-1}{x^3 e^x}$ .