I. **1ère méthode** : en utilisant la notation factorielle :

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}=\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}$$

$$=\frac{(n-1)!\times p}{p!(n-p)!}+\frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!}=\frac{(n-1)!\times(p+n-p)}{p!(n-p)!}=\frac{(n-1)!\times n}{p!(n-p)!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Par conséquent, **pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1\le p\le n$ on a : $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$**.

2nde méthode : F est un ensemble de n éléments, a est l'un d'eux ; F contient donc n – 1 éléments autres que a. Soit A une partie de F ayant p éléments.
Deux cas peuvent se produire : soit $a \in A$, soit $a \notin A$.
Si $a \in A$, les p – 1 autres éléments de A sont choisis parmi les n – 1 éléments de F.
Si $a \notin A$, les p éléments de A sont choisis parmi n – 1 éléments de F, d'où la formule :

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}.$$

II. Comme on tire deux boules simultanément de l'urne, nous sommes en présence d'un tirage sans ordre. Un tirage est donc une combinaison de deux objets pris parmi 10.

D'où : $\text{card}(\Omega)=\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45$, c'est-à-dire qu'**il y a 45 tirages possibles**.

1) a) L'issue « tirer deux jetons blancs » est une combinaison de 2 éléments pris parmi 7.

Il y a donc $\binom{7}{2}=\frac{7\times 6}{2}=21$ tirages favorables à cet événement.

Par conséquent, $\boldsymbol{p(A)}=\frac{21}{45}\boldsymbol{=\frac{7}{15}}$.

b) Il y a 6 jetons portant un numéro impair ; une issue de l'événement B est une combinaison de 2 éléments pris parmi 6. D'où : $\text{card}(B)=\binom{6}{2}=\frac{6\times 5}{2}=15$.

Par conséquent, $\boldsymbol{p(B)}=\frac{15}{45}\boldsymbol{=\frac{1}{3}}$.

c) $A\cap B$ est l'évènement « obtenir deux jetons blancs portant des numéros impairs ».
Une issue de $A\cap B$ est une combinaison de 2 éléments pris parmi 4.

Donc $\text{card}(A\cap B)=\binom{4}{2}=\frac{4\times 3}{2}=6$. Par suite, $\text{p}(A\cap B)=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$.

Or $\text{p}(A)\times p(B)=\frac{7}{15}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{45}$. Comme $\text{p}(A)\times p(B)\neq \text{p}(A\cap B)$, **les évènements A et B ne sont pas indépendants**.

2) a) X peut prendre les valeurs : 0 ; 1 et 2.

$p(X=2)=p(A)=\frac{7}{15}$; $p(X=0)=p(\text{"obtenir deux jetons noirs"})=\frac{\binom{3}{2}}{45}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$ et

$p(X=1)=p(\text{"obtenir un jeton blanc"})=\frac{\binom{7}{1}\times\binom{3}{1}}{45}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$.

La loi de probabilité de X est donc résumée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

b) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) = 0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{7}{15}=\frac{21}{15}\mathbf{=\frac{7}{5}=1,4}$.

C. Lainé