Rappelons la signification de $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$: à partir du moment où x devient suffisamment grand la valeur de $h(x) - \ell$ devient aussi petite que l'on veut, on a alors $h(x)$ dans n'importe quel intervalle de la forme $\left]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon\right[$ où ε est un réel strictement positif.

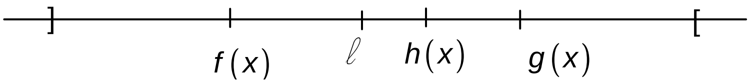
<u>Théorème</u>

Soit *f*, *g* et *h* trois fonctions définies dans un intervalle $\mathrm{I} = [a ; +\infty[$ telles que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ sur I. Alors si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

On a le même résultat en $-\infty$.

<u>Démonstration</u> :

Considérons un intervalle J contenant L :



Pour x suffisamment grand $f(x)$ et $g(x)$ sont dans J, et par conséquent $h(x)$ également. Comme on peut faire ceci pour n'importe quel intervalle contenant ℓ, la fonction h a forcément pour limite ℓ.

La démonstration est identique si on veut appliquer à $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$, la seule différence provient du comportement de x : on dira alors que x est aussi proche que l'on veut de a, soit que x est dans un intervalle de la forme $\left]a - \delta ; a + \delta\right[$, le reste étant identique.