

### Propriétés :

- Tout entier plus grand que 1 admet au moins un diviseur premier.
- Tout naturel non premier  $n$  autre que 1 admet un diviseur premier  $a$  tel que  $a \leq \sqrt{n}$ .
- Il y a une infinité de nombres premiers.

### Démonstrations :

• Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 1.

→ Si  $n$  est premier, il admet lui-même comme diviseur premier.

→ Si  $n$  est composé, il admet d'autres diviseurs que 1 et  $n$  : soit  $p$  le plus petit d'entre eux.

Alors,  $p$  est premier ; sinon, il serait composé et il admettrait un diviseur  $d$  tel que  $1 < d < p$  ; mais  $d$  serait alors un diviseur de  $n$  plus petit que  $p$ , ce qui est impossible. Donc,  $p$  est premier et  $n$  admet  $p$  comme diviseur premier.

• Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 1 ; d'après la définition,  $n$  admet un diviseur  $d$  autre que 1 et  $n$ . Alors  $n = d \times d'$ , avec  $d'$  entier naturel non nul.

$d$  est supérieur ou égal à 2.

$d'$  est supérieur ou égal à 2, car si  $d'$  était égal à 1, alors on aurait  $n = d$ .

Supposons  $d \leq d'$ . Alors,  $d^2 \leq n$  ou encore  $d \leq \sqrt{n}$ .

D'après le résultat précédent,  $d$  admet au moins un diviseur premier  $a$ , qui est aussi un diviseur premier de  $n$ .

Comme l'on a  $a \leq d$ , on en déduit  $a \leq \sqrt{n}$ .

• Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre fini d'entiers premiers. Soit  $p$  le plus grand d'entre eux et soit  $N$  le produit de tous ces nombres premiers :

$2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p$ .

Soit à présent l'entier  $N' = N + 1$  : le reste de la division euclidienne de  $N'$  par 2, 3, 5, ... ou  $p$  est 1, donc  $N'$  n'est divisible par aucun des entiers 2, 3, 5, ...,  $p$ .

→ Si  $N'$  est premier, il est supérieur à  $p$ , ce qui est absurde.

→ Si  $N'$  n'est pas premier, il a au moins un diviseur premier qui est supérieur à  $p$ , ce qui est absurde.