

1) La méthode d'intégration par parties

Théorème : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . On suppose que leurs fonctions dérivées u' et v' sont continues sur I . Alors pour tous nombres réels a et b de I ,

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Démonstration : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , on a :

$(uv)' = u'v + uv'$. Les fonctions u , u' , v et v' étant continues sur I , $u'v$, uv' et donc $(uv)'$ le sont également.

$$\text{Alors : } \int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Une des primitives de $(uv)'$ est la fonction uv donc : $\int_a^b (uv)'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b$; d'où le résultat.

2) Application

On se propose de calculer $A = \int_1^e x \ln x \, dx$ en utilisant une intégration par parties.

Solution : On connaît des primitives de la fonction $x \mapsto x$ alors que nous ne connaissons pas de primitive de la fonction \ln , par suite :

$$\text{posons } u'(x) = x \text{ et } v(x) = \ln x ; \text{ alors } u(x) = \frac{x^2}{2} \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Les fonctions $u'v : x \mapsto x \ln x$ et $uv' : x \mapsto \frac{x}{2}$ sont dérivables sur $[1 ; e]$, elles admettent donc des primitives sur cet intervalle.

Appliquons le théorème de l'intégration par parties ; on obtient :

$$A = \int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$