a) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$.

Posons $v(x) = x^{n+1}, u'(x) = e^{1-x}$; alors $v'(x) = (n+1)x^n$ et $u(x) = -e^{1-x}$.

Les fonctions *u'v* et *uv'* dérivables sur [0 ; 1], elles admettent donc des primitives sur cet intervalle.

Appliquons le théorème de l'intégration par parties ; on obtient :

$I_{n+1} = \left[-x^{n+1} e^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x} \, dx = \left(-e^0 + 0 \right) + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx$.

Par conséquent, $\mathbf{I_{n+1} = -1 + (n+1) I_n}$.

b) $I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx = \left[-e^{1-x} \right]_0^1$. Alors $I_0 = -1 + e$.

D'après la question précédente, $I_1 = -1 + I_0 = -1 + (e - 1)$. Donc : $\mathbf{I_1 = e - 2}$.

D'après la question précédente, $I_2 = -1 + 2I_1 = -1 + 2(e - 2)$. Donc : $\mathbf{I_2 = 2e - 5}$.