

1) Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a ; b]$, on a :

$(uv)' = u'v + uv'$. Les fonctions u , u' , v et v' étant continues sur $[a ; b]$, $u'v$, uv' et donc $(uv)'$ le sont également.

$$\text{Alors : } \int_a^b u'(x)v(x) dx = \int_a^b (uv)'(x) dx - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Une des primitives de $(uv)'$ est la fonction uv donc : $\int_a^b (uv)'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b$; d'où

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

2) a) • Faisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \text{Posons : } u'(x) &= e^x, & \text{alors : } u(x) &= e^x \\ v(x) &= \sin x & v'(x) &= \cos x \end{aligned}$$

Les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont dérivables sur $[0 ; \pi]$, elles admettent donc des primitives sur cet intervalle. Appliquons le théorème de l'intégration par parties ; on obtient :

$$I = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx = [e^x \sin x]_0^\pi - J = [e^\pi \sin \pi - e^0 \sin 0] - J = 0 - 0 - J.$$

Par conséquent, $I = -J$.

• Faisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \text{Posons : } u'(x) &= \sin x, & \text{alors : } u(x) &= -\cos x \\ v(x) &= e^x & v'(x) &= e^x \end{aligned}$$

Les fonctions $u'v$, uv' et $(uv)'$ sont dérivables sur $[0 ; \pi]$, elles admettent donc des primitives sur cet intervalle. Appliquons le théorème de l'intégration par parties ; on obtient :

$$I = [-e^x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -e^x \cos x dx = [-e^x \cos x]_0^\pi + J = [-e^\pi \cos \pi + e^0 \cos 0] + J = e^\pi + 1 + J$$

Par conséquent, $I = J + e^\pi + 1$.

b) D'après la question précédente, on est à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} I = -J \\ I = J + e^\pi + 1 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} I = -J \\ -2J = e^\pi + 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} I = -J \\ J = \frac{e^\pi + 1}{-2} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} I = \frac{e^\pi + 1}{2} \\ J = -\frac{e^\pi + 1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

