

**Propriété :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Démonstrations :

• On démontre que, pour tout réel  $x$ , on a :  $e^x \geq \frac{x^2}{2} + x$ .

Pour cela, on introduit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = e^x - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)$  et on admet avoir

démontré auparavant, que la courbe représentant la fonction exponentielle est toujours au-dessus de la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0..

On étudie le sens de variation de  $f$ , puis on dresse son tableau de variation.

Enfin, on s'aperçoit que 0 est le minimum de  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .

Donc, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2} + 1$ ,

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} + 1\right) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

• Pour tout nombre réel  $x$ ,  $xe^x = \frac{x}{e^{-x}} = -\frac{-x}{e^{-x}} = -\frac{1}{\frac{e^{-x}}{-x}}$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

En appliquant le théorème sur la limite d'une fonction composée, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ .

Alors,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{e^{-x}}{-x}} = 0$ , et par suite,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ .