Propriété : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Démonstrations :

• On démontre que, pour tout réel *x*, on a : $e^x \geq \frac{x^2}{2} + x$.

Pour cela, on introduit la fonction f définie sur **R** par $f(x) = e^x - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)$ et on admet avoir démontré auparavant, que la courbe représentant la fonction exponentielle est toujours au-dessus de la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0..
On étudie le sens de variation de *f*, puis on dresse son tableau de variation.
Enfin, on s'aperçoit que 0 est le minimum de f sur **R**.

Donc, pour tout réel x strictement positif, $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2} + 1$,

Comme $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2} + 1\right) = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

• Pour tout nombre réel *x*, $xe^x = \frac{x}{e^{-x}} = -\frac{-x}{e^{-x}} = -\frac{1}{\frac{e^{-x}}{-x}}$.

Or $\lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

En appliquant le théorème sur la limite d'une fonction composée, on obtient : $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$.

Alors, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{e^{-x}}{-x}} = 0$, et par suite, $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.