

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et, pour tout x strictement positif, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$.

Or $2x > 0$ sur $]0 ; +\infty[$, et $\sqrt{x}-2 > 0 \Leftrightarrow x > 4$ car $x > 0$

D'où :

x	0	4	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
g			

$2 - 2 \ln 2$

Donc pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$; c'est-à-dire $\sqrt{x} > \ln x$. Donc, $0 \leq \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Par conséquent, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.