

**Propriété** : Pour tous nombres complexes  $a$  et  $b$ , et pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Le nombre  $\binom{n}{k}$  est le coefficient du produit  $a^{n-k} b^k$  dans le développement de  $(a+b)^n$ , appelé binôme de Newton.

**Démonstration** : Utilisons une démonstration par récurrence.

• **Initialisation** : La formule est vérifiée pour  $n = 1$ .

En effet, le second membre  $\binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$  est égal au premier membre  $a + b$ .

• **Transmission** : Supposons que la formule soit vraie au rang  $n - 1$  (c'est-à-dire :

$$(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0} a^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b + \dots + \binom{n-1}{k} a^{n-k-1} b^k + \dots + \binom{n-1}{n-1} b^{n-1}.$$

Vérifions qu'elle l'est au rang  $n$ .

Pour obtenir  $(a+b)^n$ , il suffit de multiplier  $(a+b)^{n-1}$  par  $(a+b)$ .

Dans  $(a+b)^n$ , le terme  $a^{n-k} b^k$  s'obtient alors de deux façons :

- soit en multipliant  $\binom{n-1}{k-1} a^{n-k} b^{k-1}$  par  $b$ ,

- soit en multipliant  $\binom{n-1}{k} a^{n-k-1} b^k$  par  $a$ .

Or, d'après la propriété,  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ .

Alors le coefficient de  $a^{n-k} b^k$  est bien  $\binom{n}{k}$  au rang  $n$ .

• **Conclusion** :

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$