

Partie A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

Partie B

On note $0, 1, 2, \dots, 9, \alpha, \beta$, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12.

Par exemple : $\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1711$ en base 10.

1) a) Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$.

Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b) Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$.

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \dots a_1 a_0}^{12}.$$

2) a) Démontrer que $N \equiv a_0 \pmod{3}$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en

base 12.

b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3.

Confirmer avec son écriture en base 10.

3) a) Démontrer que $N = a_n + \dots + a_1 + a_0 \pmod{11}$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un

nombre écrit en base 12.

b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11.

Confirmer avec son écriture en base 10.

4) Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.