Partie A : Question de cours

Voir la fiche

Partie B

1) a) Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$.
Alors $\boldsymbol{N_1} = 12^2 \times 11 + 12 \times 1 + 10 = \mathbf{1606}$.

b) Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$.
$1131 = 12 \times 94 + 3$. Or $94 = 12 \times 7 + 10 = 12 \times 7 + \alpha$; d'où :
$1131 = 12 \times (12 \times 7 + \alpha) + 3 = 12^2 \times 7 + 12 \times \alpha + 3$. Donc $\boldsymbol{N_2 = \overline{7\alpha 3}^{12}}$.

2) a) $N = \overline{a_n ... a_1 a_0}^{12} = 12^{n-1} \times a_n + ... + 12 \times a_1 + a_0$. Or pour tout entier n non nul,
$12^n \equiv 0 \quad (3)$.
D'après les propriétés des congruences, $\boldsymbol{N \equiv a_0 \quad (3)}$.

Un nombre N, écrit en base 12, est divisible par 3 si, et seulement si, $N \equiv 0 \quad (3)$, c'est-à-dire si, et seulement si, a_0 est un multiple de 3.
Par conséquent, **un nombre écrit en base 12 est divisible par 3 si le dernier chiffre est un multiple de 3**.

b) D'après la question 1) b), le dernier chiffre de l'écriture de N_2 en base 12 est 3.
Alors $\boldsymbol{N_2}$ **est divisible par 3**.
En base 10, N_2 s'écrit 1131 ; or $1 + 1 + 3 + 1 = 6$ est divisible par 3. Cela confirme bien le résultat précédent.

3) a) On sait que $12 \equiv 1 \quad (11)$, alors pour tout entier naturel n non nul,
$12^n \equiv 1^n \quad (11) \equiv 1 \quad (11)$.
Par conséquent, $\boldsymbol{N \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \quad (11)}$.

On en déduit qu'**un nombre écrit en base 12 est divisible par 11 si la somme des chiffres, qui composent l'écriture, est un multiple de 11**.

b) La somme des chiffres de N_1 en base 12 est $\beta + 1 + \alpha = 11 + 1 + 10 = 22$, et 22 est un multiple de 11. Donc $\boldsymbol{N_1}$ **est divisible par 11**.
En base 10, N_1 s'écrit 1606 ; or $1606 = 11 \times 146$. Cela confirme bien le résultat précédent.

4) Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. N est divisible par 33 si N est divisible par 3, c'est-à-dire que y est un multiple de 3, et si N est divisible par 11, c'est-à-dire que $x + 4 + y$ est un multiple de 11.

On est alors amené à résoudre le système $\begin{cases} y = 3k \\ x + 4 + y = 11k' \end{cases}$, avec k et k' des entiers naturels.

Or $\begin{cases} y = 3k \\ x + 4 + 3k = 11k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3k \\ x = 11k' - 3k - 4 \end{cases}$.

Comme y est un entier compris entre 0 et 9, alors les valeurs possibles de k sont : 0 ; 1 ; 2 et 3.

Étudions les différents cas :

- si $k=0$, alors $y=0$ et $x=11k'-4$. Comme x est un entier compris entre 0 et 9, alors $k'=1$ et $x=7$. Dans ce cas, $\boldsymbol{N=\overline{740}^{12}=1056}$ **est divisible par 33**.
- si $k=1$, alors $y=3$ et $x=11k'-7$. Comme x est un entier compris entre 0 et 9, alors $k'=1$ et $x=4$. Dans ce cas, $\boldsymbol{N=\overline{443}^{12}=627}$ **est divisible par 33**.
- si $k=2$, alors $y=6$ et $x=11k'-10$. Comme x est un entier compris entre 0 et 9, alors $k'=1$ et $x=1$. Dans ce cas, $\boldsymbol{N=\overline{146}^{12}=198}$ **est divisible par 33**.
- si $k=3$, alors $y=9$ et $x=11k'-13$. Comme x est un entier compris entre 0 et 9, alors $k'=2$ et $x=9$. Dans ce cas, $\boldsymbol{N=\overline{949}^{12}=1353}$ **est divisible par 33**.