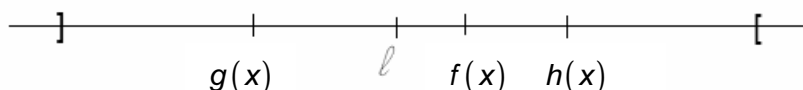


### Partie A : question de cours

1) On dit que  $f$  admet une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$  si lorsque  $x$  devient suffisamment grand, la valeur de  $h(x) - \ell$  devient aussi petite que l'on veut, c'est-à-dire que  $h(x)$  est dans n'importe quel intervalle de la forme  $]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[$  où  $\varepsilon$  est un réel strictement positif.

2) Considérons un intervalle ouvert  $J$  contenant  $\ell$  :



Pour  $x$  suffisamment grand  $g(x)$  et  $h(x)$  sont dans  $J$ , et par conséquent  $f(x)$  l'est également.

Comme on peut faire ceci pour n'importe quel intervalle contenant  $\ell$ , la fonction  $f$  a forcément pour limite  $\ell$ .

### Partie B

1) Soit  $a$  un nombre réel.  $(T)$  a pour équation  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

Or  $f = u + v$  avec  $u(x) = e^x$  et  $v(x) = -x - 1$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $\mathbf{R}$ , alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = u'(x) + v'(x) = e^x - 1$ . D'où :  $f'(a) = e^a - 1$ , et  $f(a) = e^a - a - 1$ .

Donc,  $f'(a)(x - a) + f(a) = (e^a - 1)(x - a) + (e^a - a - 1) = (e^a - 1)x - ae^a + a + e^a - a - 1$ .

Par conséquent,  $(T)$  a pour équation  $y = (e^a - 1)x - ae^a + e^a - 1$ .

2)  $(T)$  coupe la droite  $\mathcal{D}$  au point  $N$  d'abscisse  $b$ . Alors :  $(e^a - 1)b - ae^a + e^a - 1 = -b - 1$ .

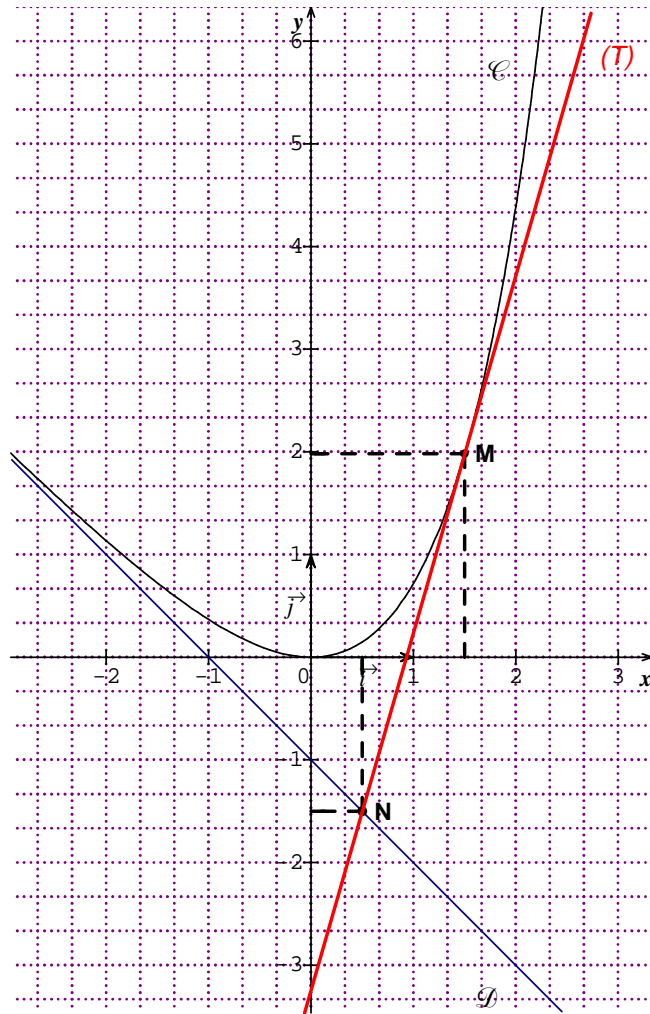
Or  $(e^a - 1)b - ae^a + e^a - 1 = -b - 1$  équivaut à  $be^a - b - ae^a + e^a - 1 = -b - 1$ , c'est-à-dire à  $be^a - ae^a + e^a = 0$ , ou encore à  $e^a(b - a + 1) = 0$ .

Comme  $e^a > 0$ , alors  $(e^a - 1)b - ae^a + e^a - 1 = -b - 1$  équivaut à  $b - a + 1 = 0$ .

Par conséquent,  $b - a = -1$ .

3) Construction de la tangente  $(T)$  à  $\mathcal{C}$  au point  $M$  d'abscisse 1,5 :

Comme  $a = 1,5$ , alors  $b = -1 + a = 0,5$ . Plaçons le point  $M$  de  $\mathcal{C}$  d'abscisse 1,5, et le point  $N$  de  $\mathcal{D}$  d'abscisse 0,5. **La tangente  $(T)$  est la droite  $(MN)$ .**



### Partie C

1) Par lecture graphique, comme la courbe  $\mathcal{C}$  est au-dessus de l'axe des abscisses et passe par l'origine, on en déduit que  $f$  est positive ou nulle sur  $\mathbb{R}$ .

2) D'après la question précédente, on en déduit que, pour tout réel  $x$ ,  $e^x - x - 1 \geq 0$ , c'est-à-dire  $e^x \geq x + 1$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Posons  $x = \frac{1}{n}$  ; on obtient  $e^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n} + 1$  (1).

Si on pose  $x = -\frac{1}{n+1}$ , on a  $e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$  (2).

3) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$$e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{car la fonction puissance } n\text{-ième est croissante sur } [0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow e \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Donc, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$ .

4) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1} &\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{n+1}} \geq \frac{n}{n+1} \\
&\Leftrightarrow \left( e^{-\frac{1}{n+1}} \right)^{n+1} \geq \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \text{ car la fonction puissance } n\text{-ième est croissante sur } [0; +\infty[ \\
&\Leftrightarrow (e^{-1}) \geq \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{e} \geq \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \\
&\Leftrightarrow e \leq \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+1} \text{ car la fonction inverse est strictement décroissante sur } ]0; +\infty[ \\
&\Leftrightarrow e \leq \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Par conséquent, **pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $e \leq \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$ .**

5) D'après les questions 4) et 5), on en déduit que :  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e \leq \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$ , pour tout entier naturel  $n$  non nul.

$$\begin{aligned}
\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e \leq \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} &\Leftrightarrow 0 \leq e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \\
&\Leftrightarrow 0 \leq e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right] \\
&\Leftrightarrow 0 \leq e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \\
&\Leftrightarrow 0 \leq e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq \frac{1}{n} \times e \text{ car } \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e \\
&\Leftrightarrow -e \leq - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq \frac{1}{n} \times e - e \\
&\Leftrightarrow e - \frac{1}{n} \times e \leq \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e
\end{aligned}$$

Par conséquent, **pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $e - \frac{1}{n} \times e \leq \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e$ .**

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( e - \frac{1}{n} \times e \right) = e$ . De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e = e$ , d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ .