Partie A

Démonstration de cours : On a les affixes *a*, *a*', *b* et *b*'. Si on a une similitude directe, celle-ci s'écrit $z'=\alpha z+\beta$; il suffit donc de trouver α et β en fonction de *a*, *a*', *b* et *b*'.

$\begin{cases} A\to A' \\ B\to B' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'=\alpha a+\beta \\ b'=\alpha b+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'=\alpha a+\beta \\ b'-a'=\alpha(b-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{b'-a'}{b-a} \\ \beta=a'-\alpha a \end{cases}$; valable si $a\neq b$, soit A et B distincts.

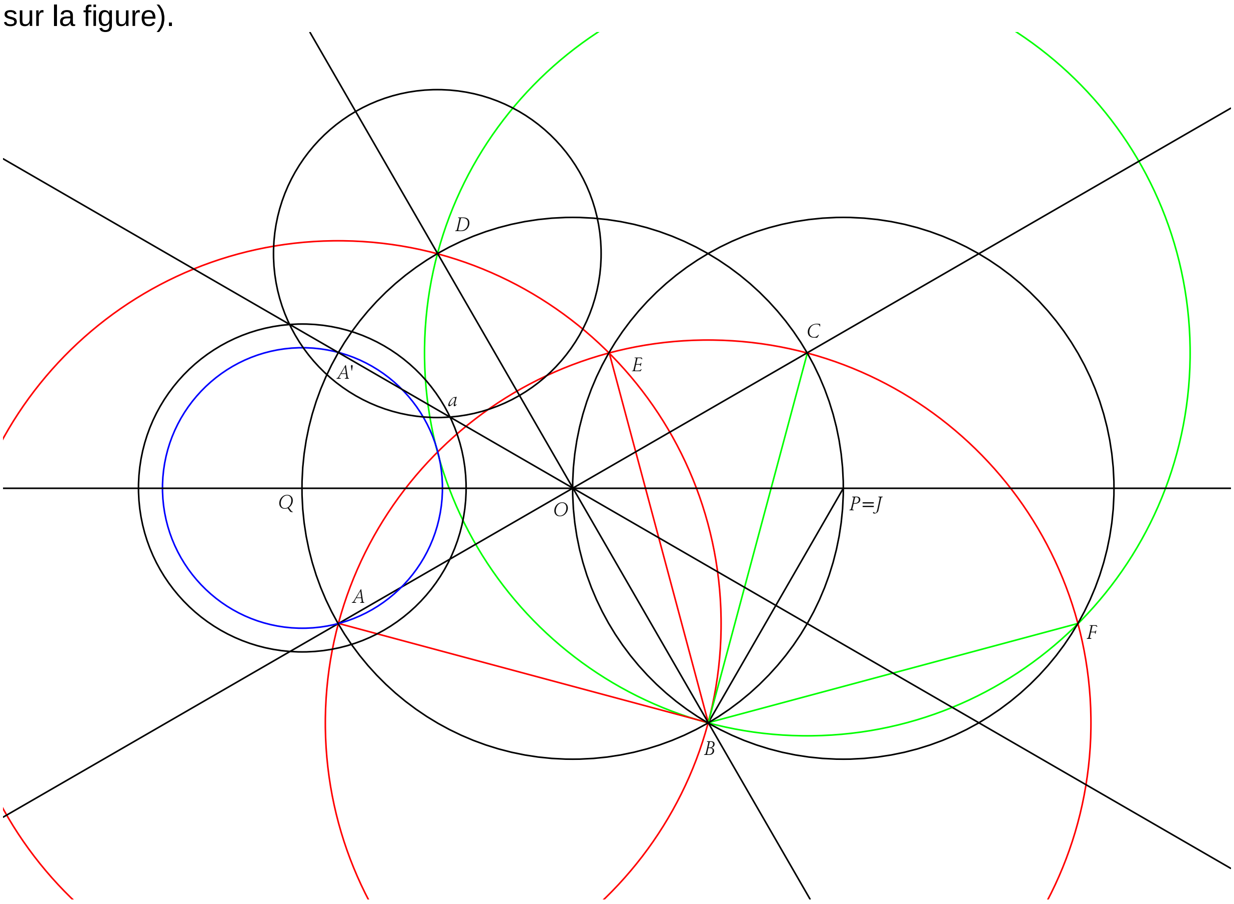
Partie B

$z_A=-\sqrt{3}-i$, $z_B=1-i\sqrt{3}$, $z_C=\sqrt{3}+i$ et $z_D=-1+i\sqrt{3}$.

1. a. $z_A=-\sqrt{3}-i=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$; $z_B=1-i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$;

$z_C=\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_D=-1+i\sqrt{3}=2\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b. Les points sont sur le cercle de centre *O*, de rayon 2 (cercle de diamètre [*PQ*]) ; *B* est un sommet de triangle équilatéral, *D* est diamétralement opposé à *B*, *A*' est sur la bissectrice de $\widehat{QOD}$ et A est tel que l'arc $\widehat{AQ}=\widehat{QA'}$; *C* est diamétralement opposé à *A* (traits pointillés noirs sur la figure).



c. $z_A+z_C=0$, $z_B+z_D=0$, le milieu est *O*. $\dfrac{z_B}{z_A}=\dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}=e^{-i\frac{\pi}{3}+i\frac{5\pi}{6}}=e^{-i\frac{3\pi}{6}}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc (*OA*) et (*OB*) sont orthogonales de même que (*AC*) et (*BD*). *ABCD* est un carré : diagonales se coupant à angle droit en leur milieu et de même longueur.

2. On considère la similitude directe *g* dont l'écriture complexe est $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z+2$.

a. $\omega=e^{-i\frac{\pi}{3}}\omega+2 \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega=2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega=2 \Leftrightarrow \omega=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$: *g* est la rotation de centre *B*, d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

b. *J* est déjà construit puisqu'il s'agit de *P*. Par ailleurs il s'agit de triangles équilatéraux : on construit les deux cercles de rayon *AB*, de centre *A* et de centre *B* ; une des deux intersections est *E* ; même chose avec les cercles de rayon *BC*, de centres *B* et *C* (en rouge et vert sur la figure).

c. *E*, *J* et *F* sont alignés : $z_{\overrightarrow{JE}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A+2-2=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A$; $z_{\overrightarrow{JF}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_C+2-2=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_C$ et $z_C=-z_A$ donc $\overrightarrow{JE}=-\overrightarrow{JF} \Leftrightarrow \overrightarrow{JE}=\overrightarrow{FJ}$: *J* est le milieu de [*EF*].

On aurait pu utiliser le fait que *O* est le milieu de *A* et *C*, soit en faisant la rotation on garde l'alignement et le milieu.