Partie A

On suppose connu le résultat suivant :
« Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbf{C}^*$ et $b \in \mathbf{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe.
Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonomal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

1) a) Donner le module et un argument de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

b) Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).

c) Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

2) On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} z + 2$.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de g.

b) Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O.

c) Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.