1) Primitives d’une fonction continue sur un intervalle

Théorème 1 : Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a est un réel de I, alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l’unique primitive de f sur I s’annulant en a.

Ce théorème est admis dans le cas général. Il établit l’existence de primitives d’une fonction continue sur un intervalle.
Démonstration : ***Cas d’une fonction continue et croissante sur I***

x_0 étant un réel de I, h étant un réel tel que $h \neq 0$ et $x_0 + h \in \mathrm{I}$.
f étant continue sur I, la fonction F est définie sur I. D’après la relation de Chasles :
$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$.

• Si $h > 0$, f est croissante sur $[x_0 ; x_0 + h]$ donc pour tout réel t de $[x_0 ; x_0 + h]$,
$f(x_0) \leq f(t) \leq f(x_0 + h)$.
D’après les inégalités de la moyenne : $h\, f(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq h\, f(x_0 + h)$, c’est-à-dire,
$f(x_0) \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq f(x_0 + h)$. D’où : $f(x_0) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$.

• Si $h > 0$, par un raisonnement analogue, on obtient : $f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$.

f est continue sur I, donc $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ et d’après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

La fonction F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. Or x_0 est un réel quelconque de I, donc F est dérivable sur I et $F' = f$. F est une primitive de f sur I.
$F(a) = 0$, F est donc l’unique primitive de f sur I qui s’annule en a.

2) Conséquences

Les résultats suivants déjà énoncés se trouvent ainsi justifiés par le théorème 1.

a) f est une fonction continue sur un intervalle I, a est un réel de I. L’équation différentielle $y' = f(t)$ admet pour solutions les primitives de la fonction f sur I, c’est-à-dire les fonctions F définies sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$ où C décrit **R**.

b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$. L’unique primitive de cette fonction qui s’annule en 1 est la fonction logarithme népérien : pour $x > 0$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.
Cette remarque prouve l’existence de la fonction ln, celle de la fonction exponentielle en découle.