

Propriété 3 Équation du second degré dans \mathbb{C}

On considère l'équation : $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c trois réels et $a \neq 0$.
le discriminant de l'équation est : $\Delta = b^2 - 4ac$.

– Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes, x_1 et x_2 :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

– Si $\Delta = 0$, l'équation a une racine double :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

– Si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Démonstration :

On considère l'expression $P(z) = az^2 + bz + c$

En utilisant la forme canonique, on a alors $P(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

– Si $\Delta > 0$, alors on obtient une différence de deux carrés et l'on peut factoriser l'expression $P(z)$. Les solutions sont les mêmes que pour la résolution dans \mathbb{R} .

– Si $\Delta = 0$, $P(z)$ est alors un carré "parfait" et on a la solution $z = -\frac{b}{2a}$

– Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$ On a alors :

$$P(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$
$$= a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

D'où le résultat.