

**Propriété** : Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Démonstration : Soit deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que  $(u_n)$  est croissante,  $(v_n)$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .

• Montrons d'abord que, pour tout  $n$ ,  $v_n \geq u_n$ .

Soit  $w$  la suite définie par  $w_n = v_n - u_n$ .

Étudions le sens de variation de  $w$ .

Pour cela, on étudie le signe de  $w_{n+1} - w_n$  :  $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1})$ .

Comme  $(v_n)$  est décroissante, alors  $v_{n+1} - v_n \leq 0$ .

Comme  $(u_n)$  est croissante, alors  $u_n - u_{n+1} \leq 0$ .

Donc  $w_{n+1} - w_n \leq 0$  ; la suite  $(w_n)$  est alors décroissante.

Comme cette suite décroît et converge vers 0, on admet que tous ses termes sont positifs.

On en déduit que  $v_n - u_n \geq 0$ , c'est-à-dire que  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n$ .

• Montrons que  $(v_n)$  et  $(u_n)$  convergent.

On sait maintenant que  $u_n \leq v_n$ .

Or la suite  $(v_n)$  est décroissante, d'où tous ses termes sont inférieurs à son premier terme  $v_0$ .

Comme  $u_n \leq v_n$  et que  $v_n \leq v_0$ , alors  $u_n \leq v_0$ .

La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par  $v_0$ , donc elle converge. Soit  $L$  sa limite.

On verrait de même que  $(v_n)$  étant décroissante et minorée par  $u_0$ , elle converge. Soit  $L'$  sa limite.

• Montrons enfin que  $L = L'$ .

On sait que  $(v_n)$  et  $(u_n)$  convergent respectivement vers  $L'$  et  $L$  ; on en déduit, d'après le théorème sur la limite d'une différence, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = L - L'$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ . Donc  $L - L' = 0$ , d'où  $L = L'$ .