1) $\boldsymbol{u_1} = \frac{u_0+v_0}{2} \mathbf{=} \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{v_1} = \frac{u_1+v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2}+4}{2} \mathbf{=} \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}, \boldsymbol{u_2} = \frac{u_1+v_1}{2} \mathbf{=} \frac{\mathbf{29}}{\mathbf{8}}$ et $\boldsymbol{v_2} = \frac{u_2+v_1}{2} = \frac{\mathbf{59}}{\mathbf{16}}$.

2) a) $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{u_{n+1}-u_n}{2} = \frac{\frac{u_n+v_n}{2}-u_n}{2} = \frac{v_n-u_n}{4} = \frac{1}{4}w_n$, pour tout entier naturel n.

Par conséquent, **la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$**.

b) $w_0 = v_0 - u_0 = 4-3 = 1$. D'après la question précédente, $w_n = w_0 \times q^n$.

Donc, $\boldsymbol{w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n}$**, pour tout entier naturel n.**

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. D'où : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0}$.

3) ➢ $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+v_n}{2} - u_n = \frac{v_n-u_n}{2} = \frac{1}{2}\times w_n = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$. Comme $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$ est strictement positif pour tout entier naturel n, alors l**a suite (u_n) est croissante**.

➢ $v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - v_n = \frac{\frac{u_n+v_n}{2}+v_n}{2} - v_n = \frac{u_n+3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n-v_n}{4} = -\frac{1}{4}\times w_n$. Comme $-\frac{1}{4}w_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ est strictement négatif pour tout entier naturel n, alors l**a suite (v_n) est décroissante**.

➢ Comme la suite (u_n) est croissante, que la suite (v_n) est décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$, alors **les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes**.

➢ **Comme les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent donc vers la même limite réelle ℓ.**

4) a) $t_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3} = \frac{\frac{u_n+v_n}{2}+2\frac{\frac{u_n+v_n}{2}+v_n}{2}}{3} = \frac{\frac{u_n+v_n}{2}+\frac{u_n+v_n+2v_n}{2}}{3} = \frac{2u_n+4v_n}{6}$.

Donc : $t_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3} = t_n$ pour tout entier naturel n.

Par conséquent, **la suite (t_n) est constante**.

b) Comme la suite (t_n) est constante, alors, pour tout entier naturel n,

$t_n = t_0 = \frac{u_0+2v_0}{3} = \frac{11}{3}$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \frac{11}{3}$

En passant aux limites, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 2\times\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}{3} = \frac{\ell+2\ell}{3} = \ell$.

On en déduit que $\ell = \frac{11}{3}$.

Par conséquent, **les suites (u_n) et (v_n) convergent vers $\frac{11}{3}$**.